Całki niewłaściwe

Definiując całkę oznaczoną zakładaliśmy, że przedział całkowania jest skończony oraz, że funkcją podcałkowa jest ograniczona w tym przedziale. Przejdziemy teraz do omówienia całek, dla których przynajmniej jeden z tych warunków nie jest spełniony. Wyróżnimy tutaj dwa rodzaje tego typu całek: całki niewłaściwe funkcji nieograniczonej oraz całki niewłaściwe w przedziale nieograniczonym.

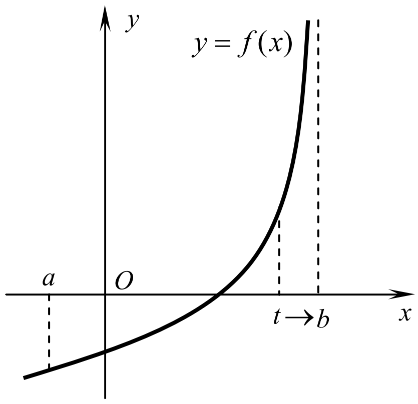
Całki niewłaściwe funkcji nieograniczonej

Niech funkcja $y = f(x)$ będzie ograniczona i całkowalna w przedziale $\langle a, b)$, lecz nieograniczona w lewostronnym sąsiedztwie punktu *b*.

Definicja. Granicę lewostronną (skończoną lub niewłaściwą)

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji f w przedziale $\langle a, b)$.



Rys. 21. Ilustracja pojęcia całki niewłaściwej funkcji nieograniczonej

Możemy zatem zapisać

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx. \tag{17}$$

Punkt b nazywać będziemy *punktem osobliwym* funkcji *f*, czyli jest to taki punkt, w sąsiedztwie którego dana funkcja jest nieograniczona. Aby w powyższym zapisie podkreślić, że punkt *b* jest punktem osobliwym funkcji podcałkowej (i w pewien sposób odróżnić całki niewłaściwe od całek oznaczonych), to został on umieszczony w kółku.

Analogicznie postępujemy, gdy punkt a (dolna granica całkowania) jest punktem osobliwym funkcji *f*. Zapiszmy krótko

$$\int_{a}^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx. \tag{18}$$

Może się zdarzyć, że obie granice całkowania (i tylko one) są punktami osobliwymi funkcji f. Wówczas w przedziale (a,b) obieramy dowolnie punkt c i zapisujemy:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx .$$

Obie całki wiemy już jak obliczyć.

Jeżeli natomiast jedynie punkt c znajdujący się wewnątrz przedziału $\langle a,b\rangle$ jest punktem osobliwym funkcji f, wówczas daną całkę obliczamy następująco:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx .$$

Uwaga. Jeżeli istnieje skończona granica określająca całkę niewłaściwą, to całkę taką nazywamy *zbieżną*. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z całką *rozbieżną.*

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln x}$, b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Rozwiązanie.

a) Aby znaleźć punkty osobliwe funkcji f wyznaczamy najpierw jej dziedzinę: $D_f = R_+ \setminus \{1\}$ (sprawdzenie tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi). Zatem niewłaściwość tej całki związana jest z jej dolną granicą całkowania. Obliczmy najpierw całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C .$$

Stąd, stosując wzór (18) otrzymamy:

$$\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln|\ln x|\right]_t^{e^{-1}} = \lim_{t\to 0^+}\left(\ln\left|\ln e^{-1}\right| - \ln|\ln t|\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\ln|-1| - \ln|\ln t|\right) = [0-\infty] = -\infty .$$

b) W tym przykładzie $D_f = R\setminus\{1\}$, czyli punktem osobliwym funkcji podcałkowej jest $x=1$. Całkując przez podstawienie obliczamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \left| \begin{array}{c} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \int t^{-\frac{2}{3}}dt = 3\sqrt[3]{t} + C = 3\sqrt[3]{x-1} + C .$$

Stosując wzór (17) otrzymamy:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{t\to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{t\to 1^-}\left[3\sqrt[3]{x-1}\right]_0^t = \lim_{t\to 1^-}\left(3\sqrt[3]{t-1}+3\right) = 3 .$$

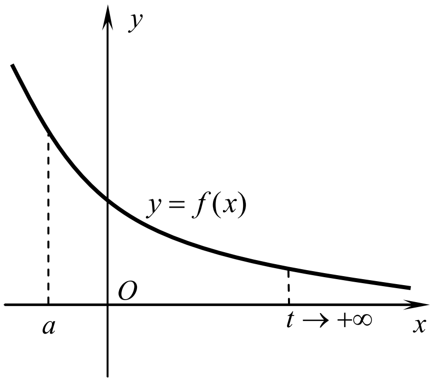
Całki niewłaściwe w przedziale nieograniczonym

Niech funkcja $y = f(x)$ będzie określona i ciągła w przedziale nieskończonym $\langle a, +\infty)$.

Definicja. Granicę (skończoną lub niewłaściwą)

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji f w granicach od a do $+\infty$.



Rys. 22. Ilustracja pojęcia całki niewłaściwej w przedziale nieograniczonym

Zapisujemy

(19) $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx .$$

Analogicznie definiujemy całkę

(20) $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx .$$

Można również rozważać całki w przedziale $(-\infty, +\infty)$, wtedy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx ,$$

gdzie c jest dowolnie wybraną liczbą rzeczywistą.

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^4+1}dx$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{3x}dx$.

Rozwiązanie.

a) Ponieważ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \left| \begin{matrix} x-3=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x-3} + C ,$$

zatem ze wzoru (19) mamy:

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \lim_{t \to +\infty} \int_4^t \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \lim_{t \to +\infty} \left[2\sqrt{x-3} \right]_4^t = \lim_{t \to +\infty} (2\sqrt{t-3} - 2) = +\infty .$$

b) Obliczamy najpierw całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x}{x^4+1}dx = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C .$$

Stąd, ze wzoru (20):

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^4+1}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{x}{x^4+1}dx = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(0-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t^2\right) = -\frac{\pi}{4} .$$

c) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{3x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{3x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{3x}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} e^{3x}dx + \lim_{p\to+\infty}\int_{0}^{p} e^{3x}dx =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_t^0 + \lim_{p\to+\infty}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^p = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{3t}\right) + \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{3}e^{3p}-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{3}-0\right] + \left[+\infty - \frac{1}{3}\right] = +\infty .$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć całki niewłaściwe (o ile istnieją):

50. $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$, **51.** $\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$, **52.** $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$,

53. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}$, **54.** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}dx$, **55.** $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$,

56. $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2+x+1}$, **57.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$, **58.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

59. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, **60.** $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$, **61.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

62. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}dx$, **63.** $\int_{0}^{1} \frac{x}{1-x}dx$, **64.** $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(1-x)^2}$,

65. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x(x-3)}$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch